

MACEDO, L. *Abstração e aprendizagem de matemática*. In: Adriana Corder Molinari, Lia Leme Zaia, Mara Fernanda Alves Ortiz, Marta Rabioglio, Orly Zucatto Mantovani de Assis, Sonia Bessa. (Org.). **Aprender matemática e conquistar autonomia - IV Seminário de Educação Matemática**. Campinas: Book Editora, 2014, p. 37-64.

# Abstração e aprendizagem da Matemática

**Lino de Macedo**

Professor Emérito do Instituto de Psicologia (USP), Membro da Cátedra “Educação Básica” do Instituto de Estudos Avançados (USP), Assessor Pedagógico do Instituto Pensi (FJLES) e Membro da Academia Paulista de Psicologia.

A abstração é importante na aprendizagem da matemática. Apresentar argumentos em favor dessa posição é o que pretendemos fazer neste texto por meio de dois recursos. O primeiro é expor as quatro formas de abstração definidas por Piaget (1975); o segundo, ilustrar a prática de tais formas através da experiência com dois jogos de regras, o Set (Silva, 2013) e o KenKen (Queiroga, 2012).

Por que Piaget? Porque seu livro “Abstração reflexionante” (Piaget, 1975) se refere às pesquisas que realizou, com colaboradores, sobre problemas de relações lógico-aritméticas, sobre a ordem das relações espaciais, sobre a sua teorização sobre este conceito e o valor que lhe atribuía nos processos de desenvolvimento cognitivo da criança e do adolescente.

Por que o jogo Set? Porque ele propõe problemas envolvendo a construção de relações espaciais entre figuras, segundo certas regras. Por que o jogo Kenken? Porque ele propõe problemas envolvendo relações lógico-aritméticas.

Por que jogos de regras, independentemente de serem o Set (Silva, 2013) ou o Kenken (Queiroga, 2012)? Porque é assim que temos feito nos últimos 30 anos nas pesquisas que realizamos com nossos orientandos no Programa de Pós-graduação em Psicologia Escolar e do Desenvolvimento Humano do Instituto de Psicologia da Universidade de São Paulo. E o que fazemos? Recorremos aos jogos para, empiricamente, criar um contexto de realização e de compreensão de conceitos importantes na obra de Piaget e de seu valor para a Psicologia, a Educação ou a Saúde.

## **Definição etimológica**

Antes de apresentar as definições de abstração de Piaget, pensamos ser útil fazer um estudo da etimologia dessa palavra. Penso que a compreensão de seu significado etimológico seja importante para avaliar as transformações conceituais propostas pelo autor, bem como para observar, com surpresa, quantos outros termos a ela se relacionam.

Para a caracterização etimológica de abstração, vou recorrer ao livro de Viaro (2004, p. 95 - 97) na obra “Por trás das palavras: Manual de etimologia do português”. É um trecho longo, mas que vale a pena transcrever por tudo o que nos ensina. Para os que não conhecem o livro, comento que, nele, Viaro adota uma metodologia interessante para o estudo etimológico das palavras. Ele cria narrativas em que o personagem Numásio realiza coisas e, por esse artifício, analisa o radical de uma palavra e todas as suas derivações ou transformações produzidas por seus afixos, tanto prefixos quanto sufixos. Abaixo, transcreve-se

sua análise do verbo *trahere*, com todas as palavras construídas a partir dele, além da que nos interessa aqui, abstração.

Vêm os amigos. Um deles traz um boi, que puxa um carro. A força que esse boi emprega no arrastar é descrita pelo verbo *trahere*, raiz  $\sqrt{\text{trah}}$ , cujo particípio passado *tractus*, de radical  $\sqrt{\text{trac.t}}$ , se vê em raízes derivadas do português:  $\sqrt{\text{tra-}}$ ,  $\sqrt{\text{trag-}}$ ,  $\sqrt{\text{tra.ç-}}$ ,  $\sqrt{\text{trat.t-}}$ . É o puro ato de tração que faz esse boi. Age como um trator. O ato de puxar pode ser feito em várias direções: quando algo nos puxa para perto, dizemos que exerce uma atração; quando muitos músculos repuxam para o mesmo lugar, trata-se de uma contração; quando esta age para trás, dizemos que houve uma retração; quando algo é puxado para fora, fez-se uma extração; quando tiramos um ovo de baixo de uma galinha, fazemos uma subtração. Quanta força empenhamos em nossas atitudes! Quando afastamos um objeto do lugar onde ele estava, não por meio de uma força física, mas por meio de um exercício mental, fazemos uma abstração. Quando puxamos toda nossa energia para outras coisas que não sejam as que costumamos fazer, dissipando-a de forma descontraída, trata-se de uma distração. Atrair, contrair, retrain, subtrair, abstrair, distrair: ideias aparentemente tão separadas no seu significado, mas todas muito próximas na origem e na força que se emprega nelas. Metáforas que parecem não estar presentes quando dizemos que um substantivo é abstrato, que alguém é atraente, que uma proposta é atrativa ou quando julgamos alguém descontraído ou retraído. Quanta força conjunta em negociações se aplica para se fazer tratos, tratados ou contratos? Quando falamos de um extrato bancário ou extrato de tomate mal pensamos que são coisas que extraímos, quer das informações bancárias, quer da própria planta. Também quando falamos de um retrato por um fotógrafo ou pintor, não vemos, imediatamente, a força com que se arranca o ser da realidade para fazer parte da representação bidimensional. E como 'retratar' é 'puxar para trás', pode-se entender não só que se trata de uma coisa, mas também de algo que foi dito: com o sentido de retirar o que foi dito, 'retratar passa a significar 'desculpar-se'. Nesses movimentos de tração, característicos do trabalho braçal, é preciso dosar a força: é

preciso ter trato. E que é tratar de algo senão lidar com cuidado? Tratamos de vários assuntos. Tratamos também dos nossos animais domésticos, de crianças e de outras pessoas fragilizadas. Que são as formas de tratamento senão formas de polidez? Também quem é hábil se serve de tretas para nos enganar, rompe tratos e é tratante. Há muita gente intratável nesse mundo. E quem puxa para baixo nossa autoestima não é chamado de detrator? Nesse extrativismo de palavras, há joias mais raras, obscurecidas pela fuligem do tempo. Puxando a pena sobre o papel, fazem-se traços, traçam-se linhas. A linguagem da pesca legou-nos o termo tralha, antiga rede de arrastão. Da caça, nasce o verbo treinar, originalmente “puxar o falcão com uma corda, em exercício de adestramento”, e hoje há treinamentos de vários tipos, treinadores e ‘personal trainers’. Também, dessa mesma raiz, nasce a palavra trem, que é o que puxa, além das palavras trenó, objetos totalmente desambientados do ambiente rural de Numásio.

Viaro para por aqui. Graças à sua explicação, ficamos sabendo as palavras formadas a partir do radical *trahere*, isto é, do ato de tração: atrair (puxar para perto), contrair (repuxar para o mesmo lugar), retrain (puxar para trás), extrair (puxar para fora), subtrair (retirar de), abstrair (afastar intelectualmente do lugar onde estava), distrair (puxar para outras coisas que não costumamos fazer), ser atraente, atrativo, abstrato, descontraído, retraído, fazer um trato, contrato, retrato, tratar, ser tratante, intratável, tralha, trem, trenó, e, por fim, treinar (puxar o falcão com uma corda como exercício de adestramento). É interessante notar o quanto, a partir do mesmo radical *trahere*, se constroem palavras relacionadas a dimensões físicas, sociais, emocionais, e não apenas cognitivas, como usualmente pensamos, quando consideramos apenas os termos abstração, subtração ou treinar.

## Definições de Piaget

Em Piaget, o termo abstração é utilizado no sentido equivalente ao que aprendemos acima, mas desenvolvido em certos aspectos teóricos, importantes aos processos de aprendizagem, em especial da Matemática. Trata-se, também para ele, de algo (um conhecimento, uma informação ou uma experiência) que se retira de um plano e se leva para outro, com a diferença de que é reorganizado nesse novo plano, gerando algo novo, surpreendente para o sujeito que realiza a ação. Por sua função reflexionante, não se trata, pois, de um simples trazer ou levar, mas de um trazer e levar que produz consequências, novidades. Esse processo, na perspectiva da abstração, pode ser feito de quatro formas, segundo Piaget. Definir essas formas no contexto do jogo Set ou do jogo Kenken e refletir sobre suas implicações na aprendizagem da Matemática são os objetivos deste texto.

De fato, Piaget cria uma teoria da abstração, em especial da abstração reflexionante, uma forma especial de abstração que reflete, devido às duas condições que a possibilitam: o reflexionamento e a reflexão. Tal forma de abstração — a reflexionante — é, para ele, “um dos motores do desenvolvimento cognitivo” (Piaget, 1995, p. 274). Entender o que é abstração reflexionante implica distinguir e integrar as quatro formas de abstração que ele propõe:

1. Abstração empírica;
2. Abstração pseudoempírica;
3. Abstração reflexionante;
4. Abstração refletida.

## **Abstração empírica (empírique)**

Para Piaget (1995), a abstração empírica “tira suas informações dos objetos como tais, ou das ações do sujeito sobre suas características materiais; de modo geral, pois, dos observáveis” (p. 274). Para entender essa definição, destaquemos seus termos principais: informações dos objetos, ações do sujeito, características materiais, observáveis. Tirar informações dos objetos, na prática, implica realizar “leituras perceptivas” (p. 141). Nos objetos, estão os dados; na leitura, a informação que se pode obter a partir deles. Ler é assimilar, ação em que o sujeito tira, como informação, algo que pertence, ou é atribuído, ao objeto. O ato de tirar ou abstrair, no caso, é empírico, já que se apoia na experiência do sujeito, possibilitada por algo exterior a ele, os objetos. Diz-se experiência porque o sujeito se acomoda às características desses objetos e ao modo como eles se apresentam, ou são, em dada situação.

Observemos também que Piaget ressalta na definição — “tirar informações das características materiais das ações do sujeito” e não apenas “tirar informações dos objetos”. Como entender essa colocação? Características materiais porque as ações do sujeito se expressam, fisicamente, por um jeito de olhar, de pegar, de observar o objeto. A isso, Piaget (1974a e 1975) designa como observável.

Nessa direção, para ele, há dois tipos de observável: os relativos ao objeto observado (Obs. O) e os relativos ao sujeito que observa (Obs. S). São duas formas de observação que caminham em direções opostas e complementares: o que o sujeito faz e como o faz, ao observar, apesar de opor-se àquilo que observa, complementa-o, na percepção final. De fato, o sujeito, na experiência, não inventa o objeto, mas atém-se a como ele se apresenta; ao mesmo tempo, contudo, ele depende de seu próprio ato de observar. Trata-se, pois, por um lado, de saber o

quê e quanto ele reconhece do objeto, ao observá-lo; por outro, qual e quanta é a consciência de suas ações, ou procedimentos, nesse processo.

Com certeza, os observáveis do sujeito (Obs. S) e os do objeto (Obs. O) constituem dois processos interdependentes, no sentido em que Piaget (1975) caracteriza esse tipo de relação sujeito-objeto. Interdependência, porque eles são irreduzíveis um ao outro: o objeto observado é o que é enquanto tal; já o sujeito que o observa é o que faz, ou pensa, sobre ele. Perceber constitui a ação ou a leitura do sujeito; perceber um objeto, o que essa ação lê como real. Mas o perceber não cria o objeto, apenas reconhece o que nele se mostra, nos limites tanto dessa percepção quanto daquilo que está no objeto.

Isso nos leva ao segundo aspecto, já mencionado, de qualquer relação interdependente: a complementaridade. O objeto, na visão interacionista de Piaget, depende do sujeito que o percebe, pois este é seu limite: ser, ou tornar-se, aquilo em que quem percebe o transforma, ou a que o reduz. Mas, há um vice-versa. O sujeito só pode ver o que está no objeto, pois — neste caso — não se trata de inventar ou criar qualquer coisa a partir do que se vê. Nesse sentido, o objeto não constitui um estímulo que gera qualquer resposta, mas um dado que comunica algo sobre si mesmo e que se assimilado, como informação, ao sujeito, nos limites, ou no nível, em que ele a possa produzir.

O terceiro e último aspecto de qualquer relação de interdependência é sua condição indissociável. Sujeito e objeto são irreduzíveis e complementares, por isso mesmo indissociáveis um do outro. No momento em que interagem, sujeito e objeto são indissociáveis, mas não confundidos. Os observáveis do sujeito (Obs. S) são diferentes dos observáveis do objeto (Obs. O); essa diferença determina, ao mesmo tempo, serem irreduzíveis entre si, mas complementar-se, porque o sujeito só pode ver o que está no objeto e só pode ver nos limites de suas possibilidades, ou seu nível de leitura ou de percepção. Em outra publicação

(Macedo, 2012a e b), tive a oportunidade de explicar esses conceitos na perspectiva da leitura de um texto, bem como de um jogo.

Proponho, agora, que ilustremos o que acabamos de apresentar no contexto do jogo Set. Ele pode ser comprado na versão cartas, produzido no Brasil pela Copag: <http://www.copagloja.com.br/produto/jogo-set.html> ou, então, jogá-lo na versão digital do site relativo ao próprio jogo <https://www.setgame.com>. No ano passado, orientamos uma dissertação de mestrado (Silva, 2013) em que esse jogo foi o principal instrumento de pesquisa.

Trata-se de um jogo apresentado em três versões: jogo de cartas, um jogo na internet e jogo de leitura de figuras, como se faz na internet. Em qualquer dos casos, cada carta apresenta uma figura diferenciada em quatro variáveis e com três atributos cada uma. A variável cor pode ser vermelha, verde ou roxa; a variável quantidade de figuras em cada carta pode ser uma, duas ou três; já a variável forma pode ser oval, losângica ou sinuosa, enquanto a variável preenchimento pode ser vazia, listrada ou cheia.

Tanto no caso das cartas, como na versão digital ou em papel, estabelece-se o jogo com a distribuição aleatória de 12 cartas, formando um retângulo 3x4 de figuras. O objetivo do jogo, na versão cartas, é encontrar três em que as variáveis, por meio de seus atributos, sejam todas iguais ou todas diferentes em relação a si mesmas. Ou seja, as três cartas têm a mesma cor, ou cada uma há uma cor diferente da outra, e assim sucessivamente, para as outras três variáveis (forma de preenchimento, número de figuras, ou forma). Trata-se de evitar cometer, sempre, o erro "dois contra um": por exemplo, duas cartas têm cor vermelha e uma verde, duas cartas têm forma oval e uma losângica, duas cartas têm uma figura e a outra, duas. Essas colocações podem, erroneamente, dar a parecer fácil evitar esse erro, mas, na prática, há de verificar-se como ele é frequente, remetendo à dificuldade de não o cometer. Encontrado o trio, ele é retirado da



mesa e colocam-se três novas cartas, seguindo assim, sucessivamente, até terminarem todo o baralho.

Na versão digital e em papel, apresentam-se, igualmente, as 12 cartas dispostas em um retângulo 3x4, mas o desafio é encontrar 6 trios de cartas em que todas as variáveis, por seus atributos, sejam ou diferentes, ou iguais, entre si. Nesse caso, duas cartas podem ser usadas para formar um novo trio.

Utilizamos esse jogo, dentre outros, para ilustrar as diferentes formas de abstração propostas por Piaget. Para o caso da abstração empírica, e com o propósito de introduzir o aluno na prática do jogo SET, criamos uma atividade que consiste no seguinte:

- São retiradas duas cartas do baralho; a tarefa é encontrar, nele, a terceira carta que compõe um set ou trio. Para isso, devem-se embaralhar bem todas as cartas e, depois, retirar duas, construindo, a partir daí, as características da terceira carta que compõe, com as outras duas, um set ou trio;

- Definida a terceira carta, a tarefa seguinte é o jogador encontrá-la no baralho.

Por que se trata de um exercício de abstração empírica?

- Embaralhar constitui uma atividade física que implica movimentar as cartas, trocando-as de lugar, de modo a garantir que a mistura produza uma localização aleatória das cartas. É ação que exige habilidade manual, observação e cuidado;

- Tiradas as duas cartas, devem-se observar suas características: cor, forma, número de figuras e preenchimento. Trata-se, portanto, de reconhecer observáveis do objeto, focando (abstraindo) os aspectos que interessa observar. Trata-se também, por intermédio dessa observação das semelhanças e das diferenças entre as cartas, de definir exatamente qual a terceira em cada uma das quatro variáveis. Tal procedimento implica observáveis do sujeito, pois é ele quem diz “não é um vermelho”, “a terceira carta precisa ter três figuras” etc. Pela

observação das duas cartas e pelos procedimentos de exclusão, comparação e identificação, o sujeito define as características da terceira carta em relação às outras duas e em relação à regra do jogo (nas três cartas, cada variável é igual ou diferente, não se permitindo o dois contra um);

- O passo seguinte é encontrar, no baralho, a terceira carta. Para tanto, o jogador deve reter a informação da carta a encontrar, podendo proceder de diferentes modos para realizar essa busca.

Os observáveis do objeto são as informações que o sujeito tira das cartas; referem-se, pois, à sua leitura perceptiva. Já os observáveis do sujeito são os procedimentos que realiza para encontrar a terceira carta; referem-se, pois, ao seu comportamento leitor.

### **Abstração “pseudoempírica” (pseudo-empírique)**

Segundo Piaget (1995, p. 274):

“Quando o objeto é modificado pelas ações do sujeito e enriquecido por propriedades tiradas de suas coordenações (por exemplo, ao ordenar os elementos de um conjunto), a abstração apoiada sobre tais propriedades é chamada “pseudoempírica”, porque, ao agir sobre o objeto e sobre seus observáveis atuais, como na abstração empírica, as constatações atingem, de fato, os produtos da coordenação das ações do sujeito; trata-se, pois de um caso particular de abstração reflexionante e, de nenhum modo, de uma decorrência da abstração empírica”.

Destaquemos, para compreender a definição, os seguintes pontos: a) o objeto é modificado pelas ações do sujeito e enriquecido por propriedades tiradas de suas coordenações; b) as constatações são produtos da coordenação das ações do sujeito; c) é um caso particular de abstração reflexionante, e não de uma abstração empírica.

Supomos que a experiência com o jogo Set seja, igualmente, um excelente exercício de abstração pseudoempírica. Voltemos ao exercício proposto. Definir a terceira carta que completa o trio, de fato, depende dos observáveis do objeto, mas implica observáveis do sujeito e suas coordenações. Trata-se de observar as duas cartas tais como propostas, reconhecer suas semelhanças e diferenças em relação às quatro variáveis em cada um de seus atributos e compará-las, com o objetivo de definir a terceira carta em cada uma das variáveis: 1) se as duas primeiras têm a cor vermelha, então a terceira também terá essa cor; 2) se as duas primeiras têm número de figuras diferentes, por exemplo, um e três, então, a terceira só poderá ter duas figuras; 3) se o preenchimento é o mesmo, as duas são vazias, então a terceira também deverá ser vazia e 4) se a forma é igual nas duas, por exemplo, ambas são ovais, então, a terceira também será oval. Ou seja, trata-se de observar semelhanças e diferenças, comparar e analisar cada caso, refletir em função da regra e decidir, em cada um dos quatro aspectos, qual será a terceira figura. O objetivo é, então, visualizar a carta para, em seguida, descobri-la no baralho.

O "objeto é modificado pelas ações do sujeito e enriquecido por propriedades tiradas de suas coordenações (por exemplo, ao ordenar os elementos de um conjunto)". O objeto, em nosso exemplo, é a terceira carta; ele é modificado, no sentido de que é definido, caracterizado, antes de ser visto, e com objetivo de ser buscado no baralho. "Enriquecido por propriedades tiradas de suas coordenações", ou seja, a carta, definida pelo conjunto de suas quatro variáveis, é definida antes de ser vista ou encontrada, e é definida pela coordenação, no caso, pelas operações do sujeito de comparar e excluir o que não pode ser e o que deve ser, em relação a cada variável. Concluída a tarefa, é como se a solução estivesse na carta, quando, de fato, ela foi fruto de uma abstração pseudoempírica realizada pelo sujeito. Para Piaget, trata-se, então, de um caso de abstração

reflexionante, e não de abstração empírica. Isso nos remete, então, ao que ele define como abstração reflexionante.

### **Abstração “reflexionante” (réfléchissante)**

É assim que Piaget (1995, p. 274) define esta forma de abstração:

“Ela se apoia sobre as coordenações das ações do sujeito, podendo essas coordenações e o próprio processo reflexionante permanecerem inconscientes, ou dar lugar a tomadas de consciência e conceituações variadas.”

Os termos a destacar aqui são: a) apoia; b) coordenações das ações do sujeito; c) coordenações e processo reflexionante inconsciente; d) tomada de consciência; e) conceituações variadas.

Vamos ilustrar o processo de abstração reflexionante através de outro jogo — o KenKen — que propõe problemas, como mencionado, envolvendo relações lógico-aritméticas entre números. Sobre esse jogo, também orientamos uma dissertação de mestrado (Queiroga, 2012). No site / <http://www.kenken.com/> encontramos muitas informações sobre o KenKen, incluindo atividades a realizar em suas diferentes versões (3x3, 4x4, em assim por diante). Podemos também consultar o livro de seu criador — Tetsuya Miyamoto (2011) — já publicado no Brasil. Ficaremos em um exemplo simples, apresentado na Figura 1, mas suficiente, supomos, para o que nos interessa aqui.

O Kenken é um jogo derivado do Sudoku e que conserva seu principal desafio: completar, com números que não se repetem, as casas vazias no tabuleiro. Mas, se o Sudoku propõe relações lógicas entre os números, o Kenken também exige operações aritméticas. As regras do Kenken são as seguintes:

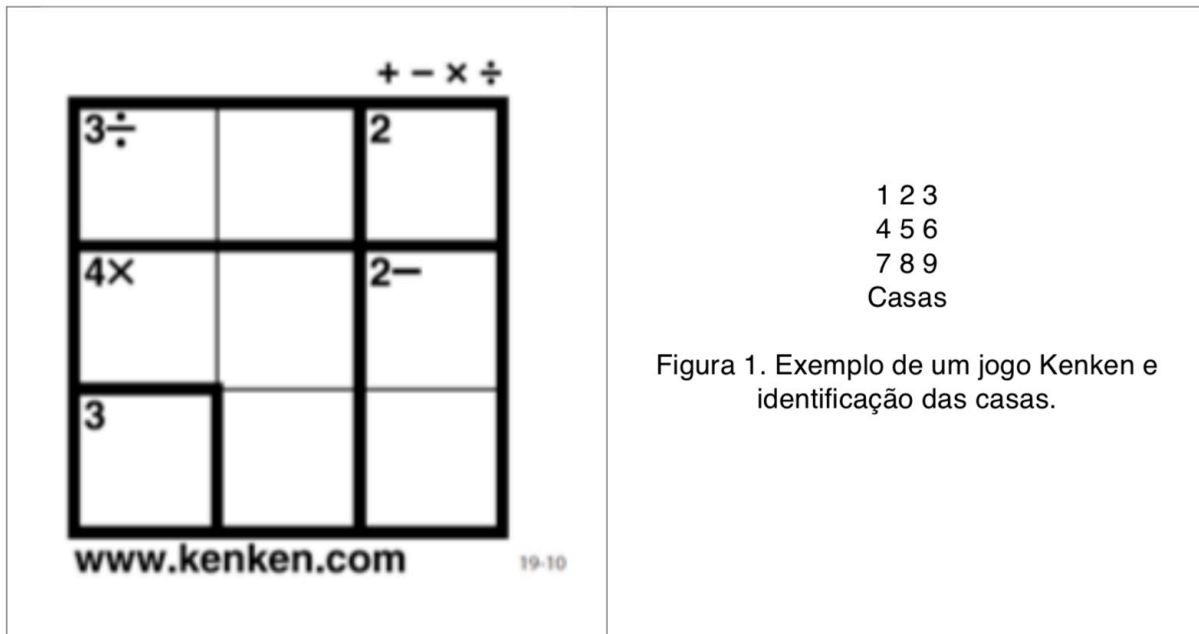


Figura 1. Exemplo de um jogo Kenken e identificação das casas.

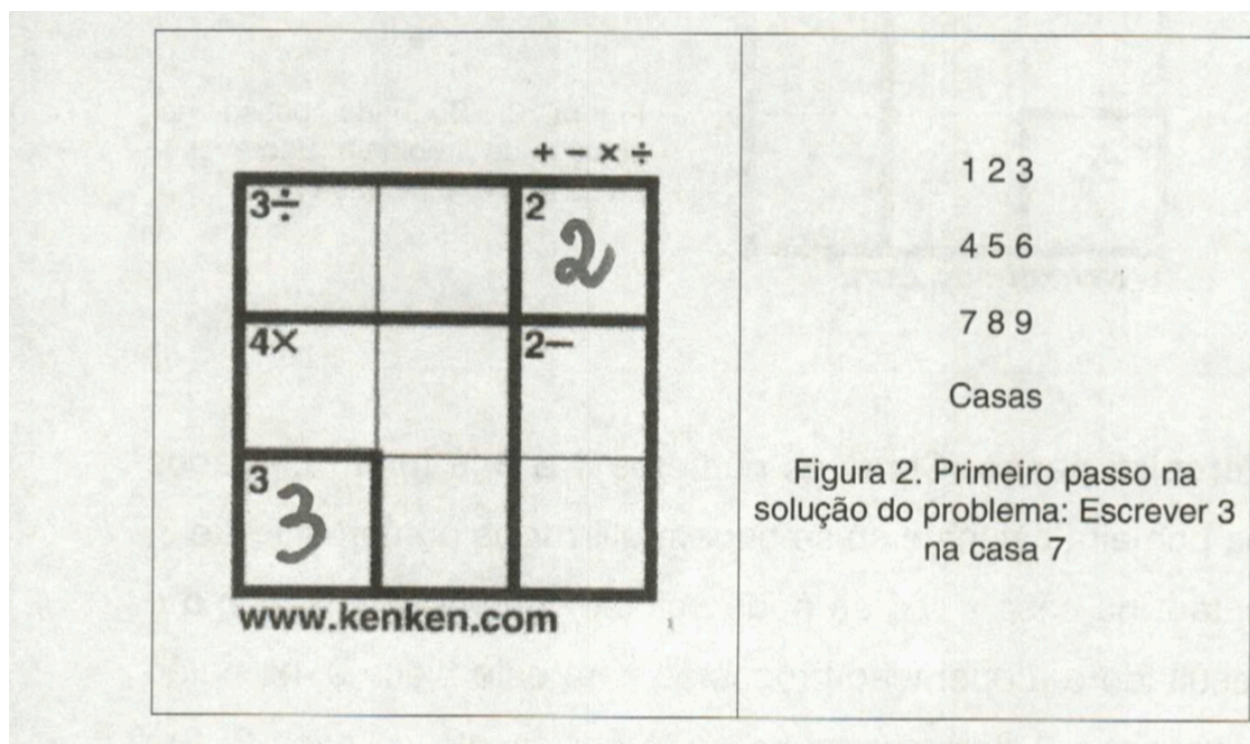
Figura 1. Exemplo de um jogo Kenken e identificação das casas.

- Usar números correspondentes às linhas e colunas da matriz escolhida. Na Figura 1, podemos utilizar apenas os números 1, 2 e 3, porque a matriz é 3x3;
- Não se pode repetir o mesmo número nas linhas e nas colunas. Ou seja, no caso de nosso exemplo, os números 1, 2 e 3 só podem aparecer uma única vez nas linhas ou nas colunas. Mas, pela regra, eles podem ser repetidos no bloco, desde que não haja repetição em linhas e colunas;
- Os números colocados nos blocos (linhas mais destacadas na matriz ou no tabuleiro) devem equivaler ao resultado e à operação propostos na parte superior à esquerda de cada bloco;
- Para os blocos de apenas uma casa, repete-se o número indicado no canto superior.

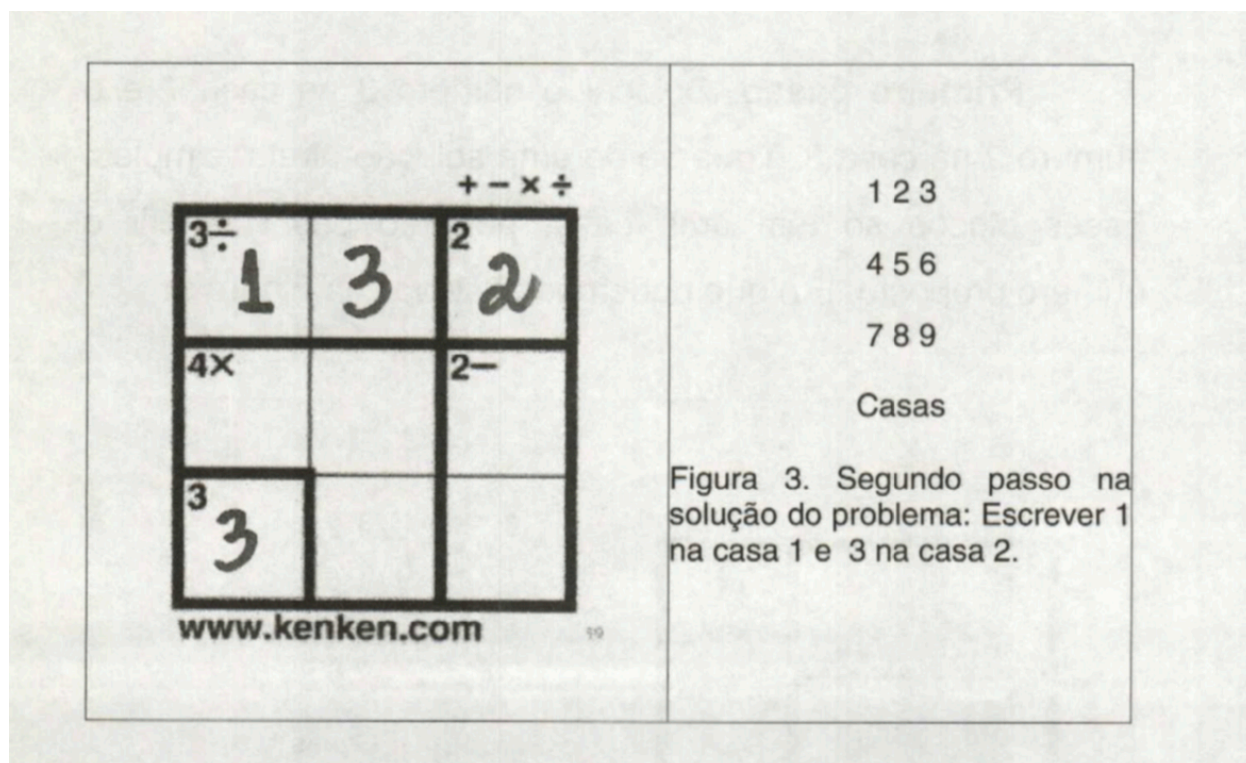
Passemos, agora, a resolver o jogo proposto, aplicando um raciocínio apoiado nas formas de abstração definidas por Piaget, sobretudo na abstração

reflexionante. Para facilitar a comunicação, identifiquemos as casas, a partir da parte superior esquerda, por números de 1 a 9. Assim, a casa 1 é aquela em que se encontra o  $3\div$  e o bloco que a ela corresponde é composto pelas casas 1 e 2. Minha forma de resolver o problema está proposta em quatro passos.

**Primeiro passo.** Colocar o número 3 na casa 7 e o número 2 na casa 3. Trata-se de uma solução direta, simples. Esses blocos só têm uma casa, portanto basta repetir o número proposto. É o que podemos observar na Figura 2.



**Segundo passo.** No bloco  $3\div$  (casas 1 e 2), só se podem utilizar os números 3 e 1. De fato,  $3\div 1=3$ . Como, na casa 7 (última casa da primeira coluna), já tem um número 3, então este segundo 3 só pode ser colocado na casa 2, o que implica escrever o 1 na casa 1.



**Terceiro passo.** Como os números 1 e 3 já foram utilizados na primeira coluna e só se podem utilizar os números 1, 2 e 3, então, na casa 4, só se pode colocar o número 2. E como o resultado e a operação propostos para este bloco é  $4x$ , então o segundo 2 deste bloco só pode ser escrito na casa 8. Em outras palavras, como a proposta deste bloco é  $4x$  e como só se pode utilizar os números 1, 2 e 3, então, as parcelas desta conta são  $2 \times 1 \times 2 = 4$ . Como não se pode repetir o mesmo número na mesma linha ou coluna, então, um 2 fica na casa 4 e o outro na casa 8 que pertencem a linhas e colunas diferentes. O resultado das soluções até agora encontradas está apresentado na Figura 4.



			+ - x ÷
<sup>3÷</sup> 1	3	<sup>2</sup> 2	
<sup>4x</sup> 2	1	<sup>2-</sup>	
<sup>3</sup> 3	2		

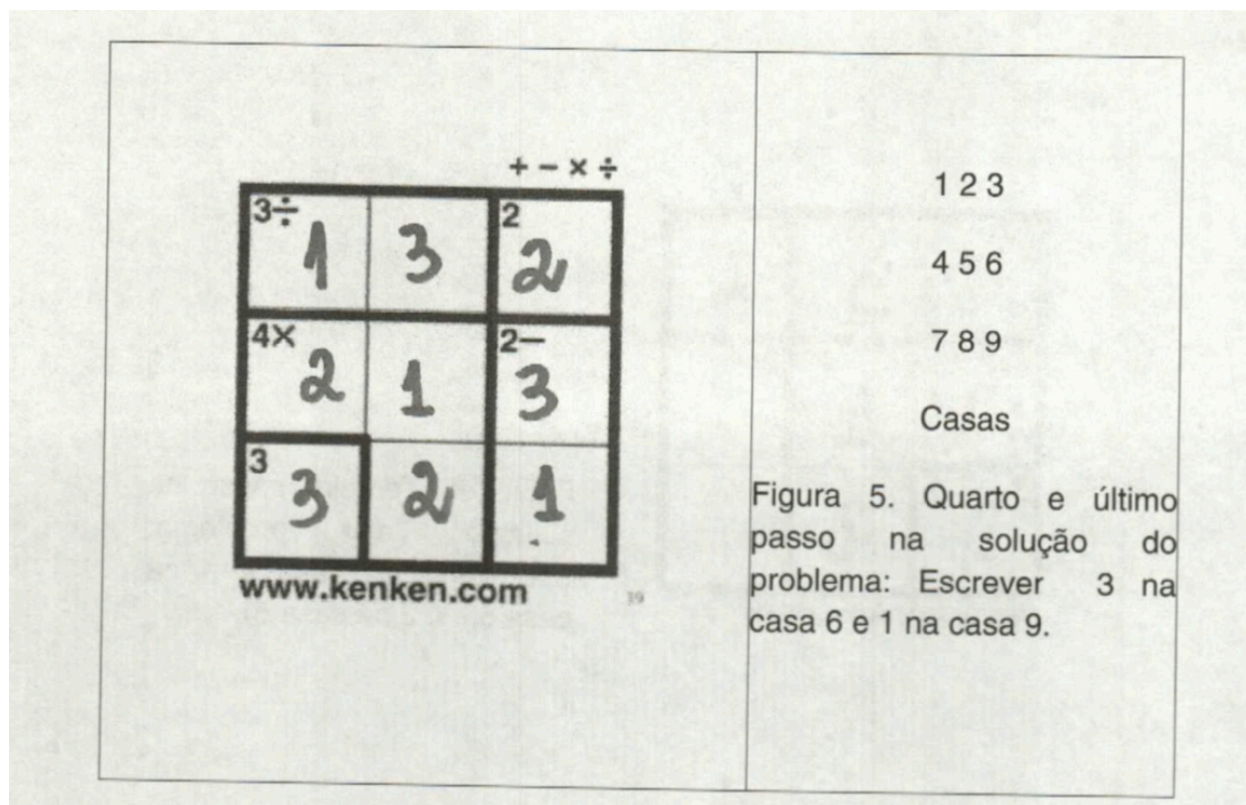
1 2 3  
 4 5 6  
 7 8 9  
 Casas

Figura 4. Terceiro passo na solução do problema: Escrever 2 na casa 4, 1 na casa 5 e o 2 na casa 8).

[www.kenken.com](http://www.kenken.com)

**Quarto e último passo.** Falta, então, a solução relativa ao bloco 2-. Por exclusão (regra do Sudoku), como já se utilizaram os números 2 e 1 nas casas 4 e 5, então, na casa 6, só pode ir o número 3. O mesmo vale para a última linha. Como já se utilizaram os números 3 e 2, então, só se pode usar o número 1 na casa 9. De fato,  $3-1=2$ , o que validam o resultado e a operação propostos para esse bloco (2-). Tem-se, assim, a solução total do problema, apresentada na Figura 5.





Voltemos aos termos destacados na definição de abstração reflexionante de Piaget:

- apoiar;
- coordenações das ações do sujeito;
- coordenações e processo reflexionante inconsciente;
- tomada de consciência;
- conceituações variadas.

O significado e a etimologia do termo apoiar são interessantes. Ele significa “dar apoio a, sustentar, amparar, defender” e deriva-se do latim, referindo-se a pódio, pedestal (Cunha, 2010, p. 49). Abstrair é, de fato, levar algo (aquilo que nos interessa em termos do problema) ao pódio, pois implica dar atenção, destacar. É também amparar ou defender o que se vai trazendo, como solução,

por meio de um raciocínio sustentado por informações, inferências e deduções. As que estão propostas no problema, ou seja, em seus observáveis: o desenho da matriz em termos de organização dos blocos, os resultados e as operações aritméticas. Há de se considerar, também, a estrutura do jogo, ou, como diz Piaget, suas coordenações (Coord. O). Só que a estrutura ou o sistema do jogo, ainda que “sendo” dele, só se pode alcançar pelas coordenações do sujeito (Coord. S), que vai, sucessivamente, resolvendo o problema pelo que está dado nele e por seus raciocínios, tipo se... então, aqui não pode, só pode isto. Trata-se, por isso, de um resolver, apoiado em observáveis e coordenações, tanto do sujeito como do objeto.

O processo de raciocínio é inconsciente (Piaget, 1971) porque o sujeito que resolve o problema não precisa saber, isto é, definir o que está fazendo, como procedimento, para resolver o jogo. Ele vai fazendo, vai pensando, vai encontrando soluções e deliciando-se com isso. Mas, para essas ações do “matemático” se transformarem em “matemática”, é necessário todo um processo de tematização, de formalização, de demonstração daquilo que ele faz, da coerência, da recorrência, da generalização ou da propriedade de suas ações. É este, para mim, o principal sofrimento de nossos alunos matemáticos. Eles não sabem explicar o porquê das relações entre as coisas, não sabem discutir, fundamentar, argumentar, defender aquilo que fazem. Não sabem tirar conclusões, nem tampouco acompanhar as demonstrações ou as explicações de seu professor. Daí que tomar consciência de tais processos de realizar e compreender um problema é fundamental ao aprendizado da Matemática.

### **Abstração refletida (réfléchié)**

Piaget (1995, p. 274) chama de abstração refletida “o resultado de uma abstração reflexionante, assim que se torna consciente, e isto, independente de seu nível”. Destaquemos, aqui, os termos: a) resultado consciente e b) independente de seu nível.

Para Piaget, o ato de tração, isto é, de levar ou puxar algo de um plano a outro no contexto da abstração reflexionante (que reflete), acontece, segundo ele, por meio de dois aspectos inseparáveis: o “reflexionamento” (réfléchissement) e a “reflexão” (réflexion). O que significa “reflexionamento”? Para Piaget (1995, p. 274), reflexionamento refere-se à “projeção (como através de um refletor) a um patamar superior daquilo que foi tirado do patamar inferior (por exemplo, da ação à representação)”. E reflexão, ele a entende como “ato mental de reconstrução sobre o patamar superior daquilo que foi assim transferido do inferior” (Piaget, 1995, p. 275).

Através de suas pesquisas, Piaget (1995, p. 275-278) destacou cinco patamares ou graus de reflexionamento: 1) Ação - representação, 2) reconstituição, 3) comparações, 4) reflexões, e 5) metarreflexões ou pensamento reflexivo.

Novos patamares de “reflexionamentos” constroem-se, portanto, sem cessar para permitir as novas “reflexões” — é o que mostra a história das diferentes áreas da matemática, em suas tematizações sucessivas, até suas fases atuais.

## **Reflexão**

A reflexão, proporcionada pela abstração reflexionante, tem natureza criativa, que produz novidades, que gera uma crescente riqueza de formas.

“Todo novo reflexionamento exige uma reconstrução sobre o patamar superior daquilo que fora dado no precedente. Essa reconstrução é necessária pois as

ligações entre as mesmas ações A, B e C etc. não são idênticas. Uma coisa, por exemplo, é uma ação material ocorrendo sucessivamente, outra é a representação que as acompanha". (Piaget, 1995, p. 278).

Piaget (1995, p. 278 - 282) descreve dez enriquecimentos progressivos no processo de reflexão: 1) fazer escolhas, 2) tomar consciência, 3) ordenar, 4) comparar, 5) estabelecer implicações significantes, 6) generalizar por inversões ou negações, 7) quantificar as extensões, 8) realizar operações concretas, 9) realizar operações hipotético-dedutivas ou formais e 10) realizar metarreflexões.

## **Considerações Finais**

Na última parte, interessa-nos comentar, ao menos superficialmente, o lugar da abstração reflexionante na aprendizagem da Matemática. Essa disciplina pode ser resumida, talvez, em uma única afirmação: ela consiste em um jogo de recorrências e extrapolações. Recorrências a algo aceito por definição, a um postulado ou axioma, a demonstrações anteriores, a algo que se pode tirar (abstrair) de uma experiência como conteúdo. Extrapolações porque, por um jogo de demonstrações, relações, comparações, inferências, pode-se chegar a um novo conhecimento, a algo mais geral, a algo que não se sabia antes desse processo de formalização. Recorrências e extrapolações são, como vimos, a própria definição da abstração, a que retira algo de um lugar e o leva para outro ao preço de novas organização, identificação ou caracterização daquilo que se conhecia no plano anterior. Trata-se de um processo reflexionante, que reflete, que toma consciência das ações realizadas, que reconhece características ou propriedades dos objetos, que faz recortes, cálculos, que cria modelos ou fórmulas, que demonstra. Nossa hipótese é que certos jogos, trabalhados de certo modo, sob a mediação de um professor, que sabe aonde quer chegar, podem mobilizar aspectos importantes

desses processos de abstração reflexionante, que tornam possível a aprendizagem da Matemática.

## Referências

MACEDO, Lino de. *Observáveis, coordenações, leitura e jogo: Tecendo laços*. In: A. C. Ortega e C. B. Rossetti (Org.). **Cognição, afetividade e moralidade: Estudos segundo o referencial teórico de Piaget**. São Paulo: CASA DO PSICÓLOGO, 2012, p. 69- 91.

MACEDO, Lino de. *El desarrollo psicológico del juego y la educación*. In: Mario Carretero; José A. Castorina; Alicia Barreiro. (Org.). **Desarrollo cognitivo y educación (II) - Processos del conocimiento y contenidos específicos**. Buenos Aires: PAIDÓS, 2012, p. 145-167.

MIYAMOTO, Tetsuya. **Kenken: A evolução do Sudoku**. São Paulo: MATRIX, 2011.

PIAGET, Jean & Cols. **Abstração reflexionante**. Porto Alegre: ARTES MÉDICAS, 1995

PIAGET, Jean ( 1971). *Inconscient affectif et inconscient cognitif*. In: **Problèmes de psychologie génétique**. Paris: DENOEL / GONTHIER, 1972.

PIAGET, Jean (1977) **O desenvolvimento do pensamento: Equilibração das estruturas cognitivas**. Lisboa: DOM QUIXOTE, 1975.

PIAGET, Jean (1974a). **A tomada de consciência**. São Paulo: MELHORAMENTOS & EDUSP, 1977.

PIAGET, Jean (1974b). **Realizar e compreender**. São Paulo: MELHORAMENTOS & EDUSP, 1978.

QUEIROGA, Talita Lima. **Jogos de raciocínio lógico-matemático em alunos da Escola Fundamental II**. Dissertação de mestrado. São Paulo: Instituto de Psicologia, USP, 2012.

SILVA, Sandreilane Cano da. **O jogo Set em adolescentes, adultos e idosos: Aspectos cognitivos**. Dissertação de mestrado. São Paulo: Instituto de Psicologia, USP, 2013.

VIARO, Mário Eduardo. **Por trás das palavras: Manual de etimologia do português**. São Paulo: GLOBO, 2004.